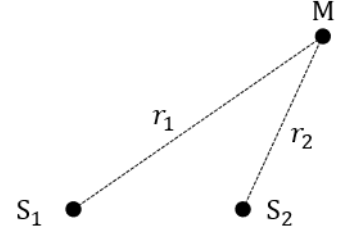

Chapitre O5 – Interférences à deux ondes

I) Interférences à deux ondes

1) Position du problème

Soit deux sources S_1 et S_2 qui émettent respectivement deux OPH de même fréquence et de même phase à l'origine (prise égale à 0, ce choix est arbitraire). Les signaux reçus au point M et à l'instant t s'écrivent :

$$s_1(M, t) = A_1 \cos(\underbrace{\omega t - kr_1}_{\phi_1}) \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = A_2 \cos(\underbrace{\omega t - kr_2}_{\phi_2})$$



Le signal total reçu en M s'écrit donc :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

L'objectif du cours est d'étudier $s(M, t)$.

2) Amplitude de l'onde résultante

On associe à chaque signal harmonique réel un signal complexe.

$$\begin{cases} \underline{s}_1(M, t) = \underline{A}_1 e^{i\omega t} & \text{avec : } \underline{A}_1 = A_1 e^{i\phi_1} \\ \underline{s}_2(M, t) = \underline{A}_2 e^{i\omega t} & \text{avec : } \underline{A}_2 = A_2 e^{i\phi_2} \end{cases}$$

Le signal résultant complexe est :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = \underline{A} e^{i\omega t} \quad \text{avec : } \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A e^{i\phi}$$

Le signal résultant est un signal harmonique d'amplitude complexe $\underline{A}$. Le signal résultant réel s'écrit donc :

$$s(M, t) = \mathcal{Re}(\underline{s}(M, t)) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Déterminons A .

$$\begin{aligned} A^2 &= \underline{A} \times \underline{A}^* \\ &= (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \times (\underline{A}_1 + \underline{A}_2)^* \\ &= (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) \times (A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{i(\phi_2 - \phi_1)}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i\Delta\phi} + e^{-i\Delta\phi}) \quad \text{avec : } \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\phi) \end{aligned}$$

Conclusion : l'amplitude de l'onde résultante au point M dépend du déphasage entre les deux signaux.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\phi) \quad \text{avec : } \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \text{avec : } \delta = r_2 - r_1$$

Dans le cas où les signaux ont la même amplitude $A_1 = A_2 = A_0$.

$$A^2 = 2A_0^2 (1 + \cos(\Delta\phi))$$

3) Conditions d'interférences

Vocabulaire :

On donne le lien entre la **différence de marche** $\delta = r_2 - r_1$, le **déphasage** $\Delta\phi$ et l'**ordre d'interférence** p .

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi p$$

Définition :

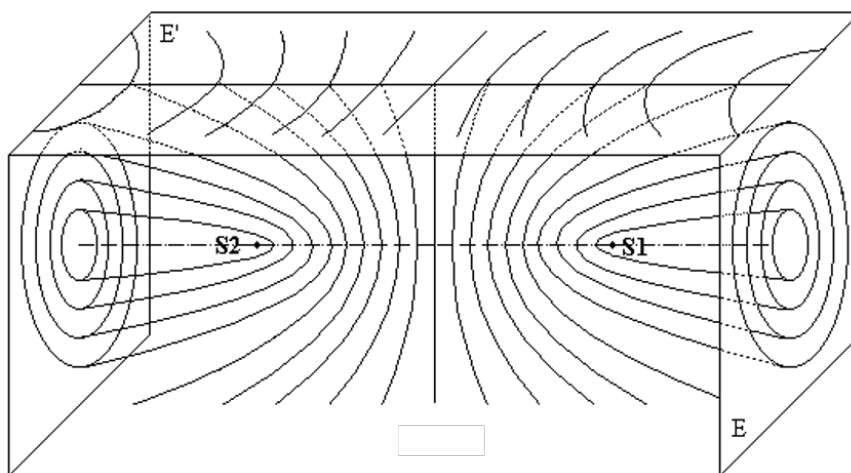
Des **interférences constructives** (resp. **destructives**) correspondent à un maximum (resp. minimum) d'amplitude du signal résultant.

On en déduit les conditions d'interférences. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

	Interférences constructives	Interférences destructives
Définition	A est maximale	A est minimale
Déphasage	$\Delta\phi = 2\pi k$	$\Delta\phi = 2\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)$
Différence de marche	$\delta = k\lambda$	$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$
Ordre d'interférence	$p = k$	$p = k + \frac{1}{2}$

Remarque :

On représente sur le schéma ci-dessous les zones d'interférences constructives. Si on place un détecteur dans un plan parallèle (respectivement perpendiculaire) à l'axe des sources, on observe des franges rectilignes (respectivement circulaires).



II) Cas des interférences lumineuses

1) Chemin optique

On rappelle le lien entre la longueur d'onde λ_0 dans le vide et la longueur d'onde λ dans le milieu d'indice n .

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

On en déduit le déphasage :

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (nr_2 - nr_1)$$

Soit une onde lumineuse qui se propage de A vers B dans un milieu homogène d'indice optique n . On appelle **chemin optique** :

$$(AB) = n \times AB$$

On appelle **différence de marche** entre deux rayons lumineux la différence de chemin optique :

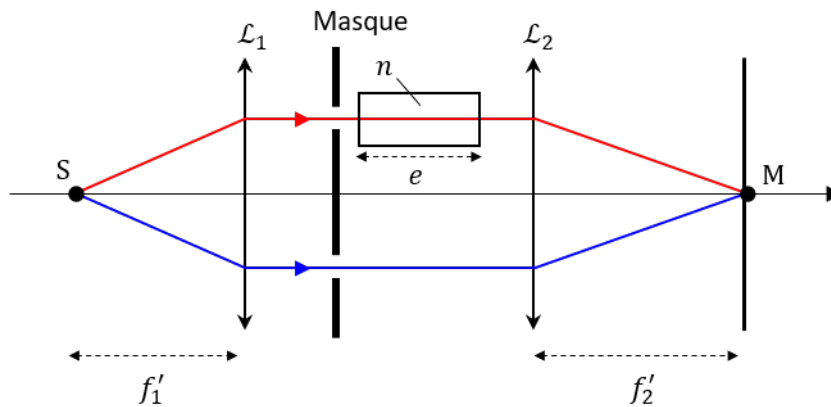
$$\delta = (S_2M) - (S_1M)$$

On en déduit le lien entre δ , $\Delta\phi$ et p .

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = 2\pi p$$

Application : déphasage induit par une lame de verre

On considère la situation suivante.



On veut déterminer la différence de marche entre les deux rayons qui partent de S et qui arrivent en M (centre de l'écran).

$$\delta = (SM)_{\text{rouge}} - (SM)_{\text{bleu}} = (n - 1) e$$

2) Éclairement

Les fréquences de la lumière visible sont très importantes.

$$\lambda_0 \sim 500 \text{ nm} = 5 \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Les champs électriques et magnétiques oscillent 6×10^{14} fois par seconde. Aucun détecteur n'est capable de suivre ces oscillations. On admet que les détecteurs de lumière sont sensibles à l'**éclairement** ou **intensité lumineuse**, définie par :

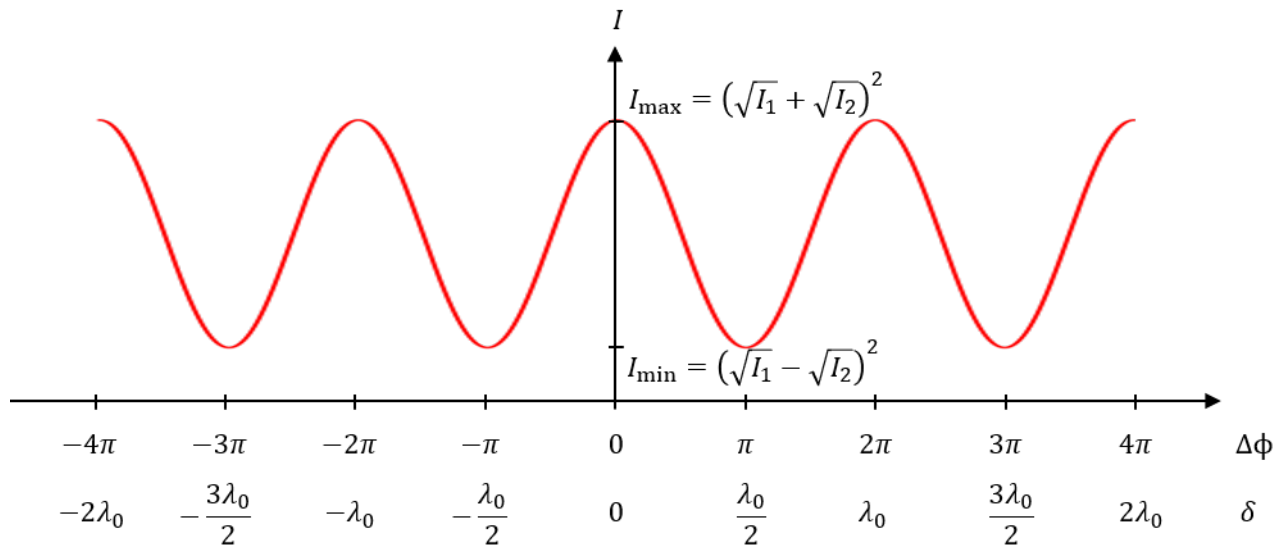
$$I = k \langle A^2 \rangle \quad \text{avec } k > 0 \text{ une constante qui dépend du détecteur}$$

3) Formule de Fresnel

On rappelle l'expression de l'amplitude de l'onde résultante :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\phi) \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\Delta\phi)$$

où I_1 (respectivement I_2) représente l'éclairement qui aurait été observé sur l'écran si la source 1 (respectivement 2) avait été seule.



Remarque :

On voit bien avec cette formule que $I \neq I_1 + I_2$. L'énergie lumineuse se concentre dans les zones de l'espace autour de $\cos(\Delta\phi) = +1$

Dans le cas où les signaux ont la même amplitude $A_1 = A_2 = A_0$.

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos(\Delta\phi) \right)$$

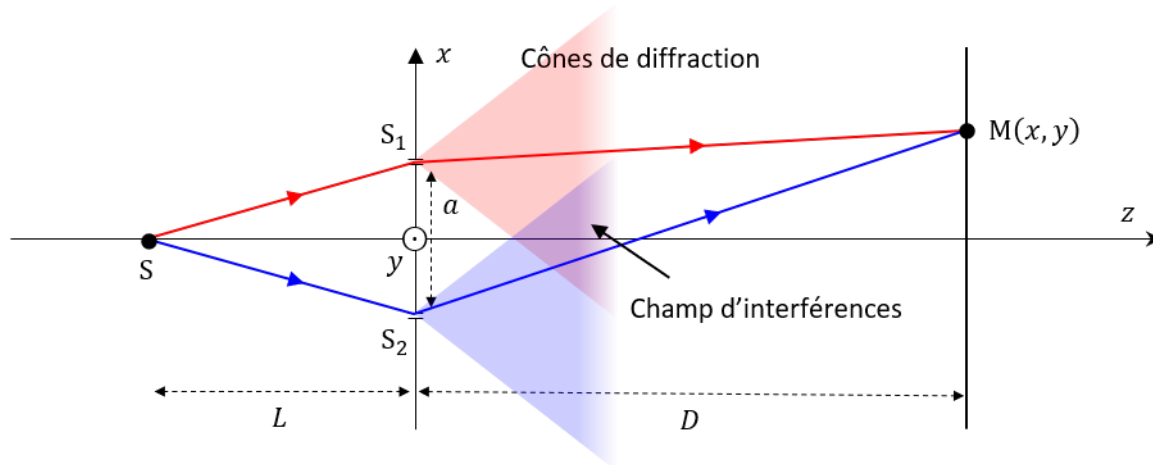
On en déduit les conditions d'interférences. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

	Interférences constructives	Interférences destructives
Définition	I est maximale	I est minimale
Déphasage	$\Delta\phi = 2\pi k$	$\Delta\phi = 2\pi \left(k + \frac{1}{2} \right)$
Différence de marche	$\delta = k\lambda_0$	$\delta = \left(k + \frac{1}{2} \right) \lambda_0$
Ordre d'interférence	$p = k$	$p = k + \frac{1}{2}$

III) Expérience des trous d'Young

1) Description du dispositif

Soit une source S qui éclaire deux trous de petite taille. Lorsqu'une onde lumineuse arrive sur un trou de taille d comparable à λ_0 , l'onde diffracte. Ainsi, chaque trou se comporte comme une source secondaire, notée S_1 ou S_2 . On place un écran à une distance D . En tout point de l'écran, on a donc des interférences à deux ondes lumineuses.



Coordonnées des points :

$$S_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

On suppose que : $D \gg a, x, y$

2) Différence de marche

Calculons :

$$\delta = (SM)_{\text{bleu}} - (SM)_{\text{rouge}} = n[S_2M - S_1M]$$

On calcule la distance :

$$S_2M = \sqrt{(x_M - x_{S_2})^2 + (y_M - y_{S_2})^2 + (z_M - z_{S_2})^2} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{D^2}}$$

On rappelle que :

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x \quad \text{avec : } x \ll 1$$

On en déduit :

$$1 \gg \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{D^2} \Rightarrow S_2M \simeq D \left(1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{2D^2} \right)$$

De même,

$$S_1M \simeq D \left(1 + \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{2D^2} \right)$$

On en déduit la différence de marche :

$$\delta = n[S_2M - S_1M] = \frac{n}{2D} \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right] = \frac{nax}{D}$$

Remarque : pour la dernière étape, utiliser $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

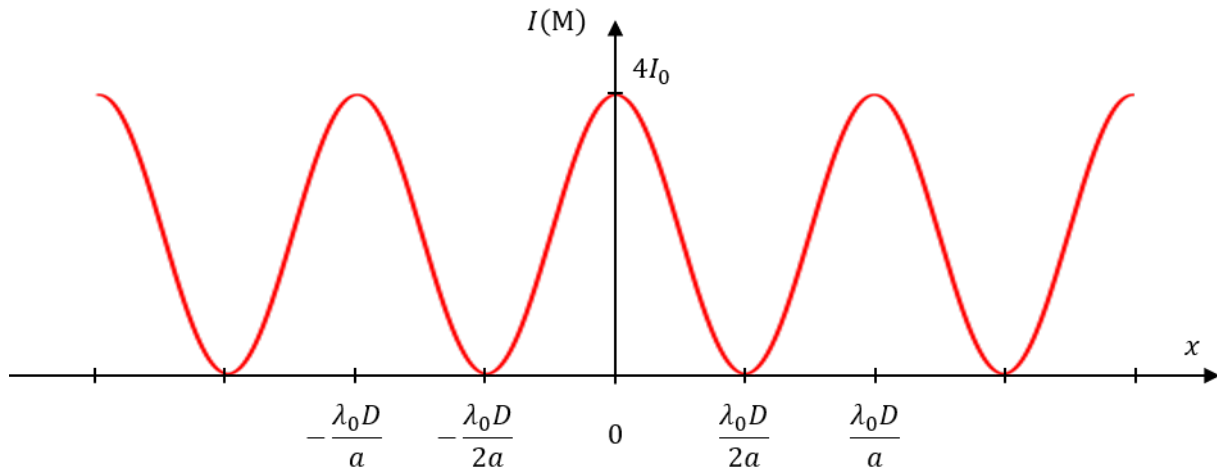
3) Figure d'interférences

L'expérience a lieu dans l'air. On prend $n = 1$.

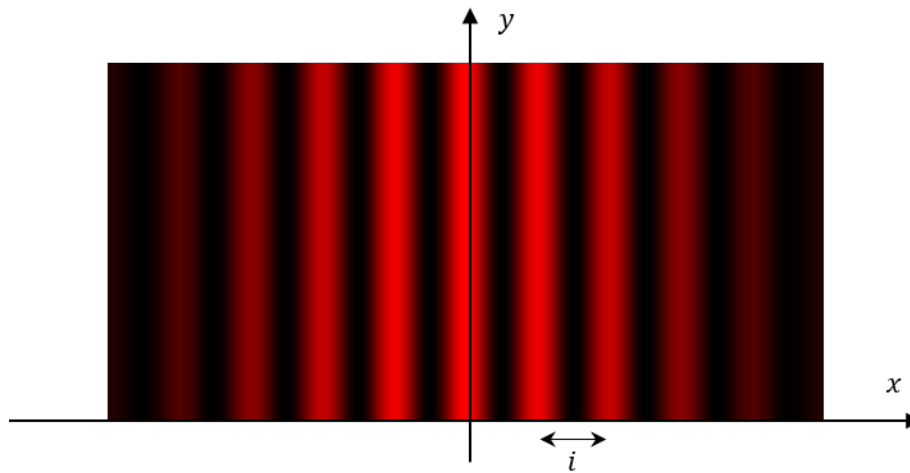
Chaque source secondaire émet une onde de même amplitude. La formule de Fresnel donne alors :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos(\Delta\phi) \right) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \right)$$

Figure d'interférences :



L'éclairement ne dépend pas de y . On observe donc des franges rectilignes.



Définition :

On appelle **interfrange**, noté i , la distance entre deux franges. Il s'agit donc de la période du cosinus.

Rappel :

Dans le cas le plus général, un cosinus se met sous la forme (exemple avec un cosinus temporel) :

$$f(t) = \cos(\omega t + \phi) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right)$$

Ici, on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) = \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \quad \text{avec : } \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{a}}$$

Remarque :

La figure d'interférence ne dépend pas de la position des trous le long de l'axe y . On peut donc remplacer les trous par des fentes, sans changer la nature de la figure d'interférence. Cela permettra en TP d'avoir une figure plus lumineuse.